ИЗПОЛЗВАНЕ НА АСИМПТОТИЧНИ МЕТОДИ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ НА ДИНАМИЧНИ СИСТЕМИ

Костадин Шейретски[1], Румен Шкевов[2], Николай Ерохин[3, 4]

[1] Университет за национално и световно стопанство
[2] Институт за космически изследвания и технологии – Българска академия на науките
[3] Институт за космически изследвания – Руска академия на науките
[4] Руски университет за дружба между народите, Москва, Русия
e-mail: ksheiretsky@space.bas.bg

Ключови думи: *небесна механика, нелинейна динамика, асимптотични методи, взаимодействие вълна-частица*

Резюме: *В доклада са разгледани три моделни задачи, в математическия апарат на които влизат нелинейни диференциални уравнения. Тези задачи са решени, като за всяка една от тях е приложен определен асимптотичен метод, подбран в съответствие със структурата на диференциалните уравнения. Задачите са решени до край в приетото приближение.*

ASYMPTOTIC METHODS APPLICATION IN DYNAMIC SYSTEMS STUDY

Kostadin Sheiretsky[1], Rumen Shkevov[2], Nikolay Erokhin[3, 4]

[1] University of National and World Economy
[2] Space Research and Technology Institute – Bulgarian Academy of Sciences
[3] Space Research Institute – Russian Academy of Sciences
[4] Peoples' Friendship University of Russia
e-mail: ksheiretsky@space.bas.bg

Keywords: *celestial mechanics, nonlinear dynamics, asymptotic methods, wave-particle interaction*

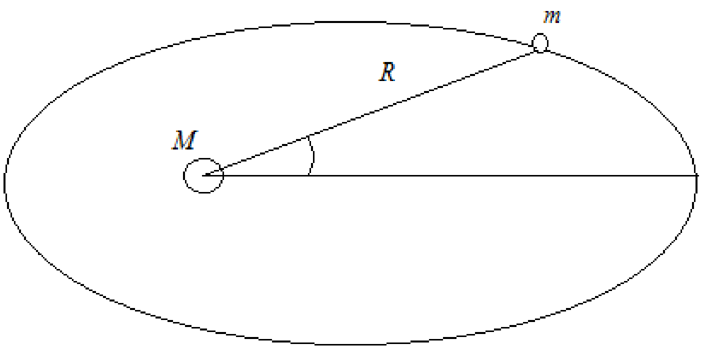
Abstract: *The paper examines three model problems in the mathematical apparatus of which are nonlinear differential equations included. According to the structure of the differential equations and applying carefully selected correct asymptotic method, each one problem is correctly solved. In assumed approximation the tasks are solved completely.*

Въведение

Асимптотичните методи са мощен апарат за решаване на нелинейни диференциални уравнения . Получават се решения в редове по малък параметър, които не е задължително да са сходящи, но в предварително уточнени граници, на стойностите, на участващите в уравненията променливи, тези редове адекватно описват моделираната от тях динамична система. Класически и широко използван е методът на Поанкаре-Линдщед - един от първите методи, който се използва за решаване на задачи свързани с движението на космичните тела [2]. Друга група методи, се базират на усредняване на получените системи от обикновени диференциални уравнения – метод на Ван дер Пол и метод на Кирилов – Боголюбов-Митрополски [6], [7]. В доклада са представени три задачи, които са поставени в различни физични области: небесна механика, радиофизика и взаимодействие на вълна с частица.

Определяне траекторията на спътник на планета по метод на Поанкаре-Линдщед

Да се намерят уравнението на траекторията и прецесията на материална точка - спътник, движещ се в централно гравитационно поле, под действието на потенциал: $U = \frac{\gamma M m}{R} + \frac{\alpha}{R^3}$, където γ е универсална гравитационна константа, M е маса на централното тяло, m е маса на спътника, R е разстояние от централното тяло до спътника, φ е полярния ъгъл, а α е коефициент изразяващ несферичната форма на централното тяло [3], [8], [9].



Фиг. 1. Траектория на спътник

Записваме интегралите за запазване на енергията и импулса на системата [5]:

(1) $$\frac{1}{2}m\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{k}{R} - \frac{\alpha}{R^3} = E, \quad k = \gamma M m,$$

(2) $$G = mR^2\dot{\varphi}.$$

Изразявам разстоянието до силовия център R като функция на полярния ъгъл φ

(3) $$\frac{1}{2}\frac{G^2}{mR^4}\left[\left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2 + R^2\right] - \frac{k}{R} - \frac{\alpha}{R^3} = E.$$

Полагаме $\sigma = \frac{1}{R}$ и диференцираме равенството (3) още веднъж, като отбелязваме с щрих производната по полярния ъгъл, по този начин се достига до уравнение от вида

(4) $$\sigma'' + \sigma - \frac{3\alpha m}{L^2}\sigma^2 = \frac{km}{G^2}.$$

За да се опрости уравнението, търсим решение във вид на сбор от константа и функция

(5) $$\sigma = \sigma_0 + f, \quad \sigma_0 = cons.$$

Константата подбираме така, че в уравнението за неизвестната функция да няма свободни членове.

(6) $$-\frac{3\alpha m}{L^2}\sigma_0^{\,2} + \sigma_0 - \frac{k\,m}{L^2} = 0,$$

(7) $$f'' + \left(1 - \frac{6\alpha m}{L^2}\sigma_0\right)f + \frac{3\alpha m}{L^2}f^2 = 0.$$

Решаването на уравнение (6) налага да преминем към дефинирането на нова безразмерна променлива

(8) $$x \equiv \frac{L^2}{k\,m}\sigma_0.$$

Така достигаме до уравнението

(9) $$-\alpha_1 x^2 + x - 1 = 0,$$

където $\alpha_1 = \frac{3\alpha m^2 k}{L^4}$. Когато $\alpha_1 = 0$ следва, че $x_0 = 1$. Логично е в случая $\alpha_1 \neq 0, \alpha_1 << 1$ да потърсим решението като ред по степените на малкият параметър

(10) $$x = x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \dots$$

Заместваме (10) в уравнение (9)

$$-\alpha_1 \left(x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \dots\right)^2 + x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \dots - 1 = 0$$

Приравняваме коефициентите пред еднаквите степени и намираме неизвестните величини

$$x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2 \dots$$

Така окончателно достигаме до израза за константата

(11) $$\sigma_0 = \frac{km}{G^2} + \frac{3\alpha m^2 k^2}{G^6} + \frac{18\alpha^2 m^5 k^3}{G^{10}} + \dots$$

Полагаме:

(12) $$n_0^2 \equiv 1 - \frac{6\alpha m}{G^2}\sigma_0$$

и достигаме до израза

(13) $$f'' + n_0^2 f + \frac{1 - n_0^2}{2\sigma_0} f^2 = 0.$$

Преминаваме към безразмерната променлива

(14) $$y \equiv \frac{G^2}{km} f, \beta \equiv \frac{1 - n_0^2}{2\sigma_0}\frac{km}{G^2},$$

с β е означен малък параметър, посредством който ще решаваме полученото уравнение

(15) $$y'' + n_0^2 y + \beta y^2 = 0$$

по метода на Поанкаре-Линдщед.

Разглеждаме безразмерната променлива, като функция на $\nu = \omega\varphi$.

Търсим решение на уравнението (15) във вид на редове

$$y = y_0 + \beta y_1 + \dots,$$

(16) $$\omega = n_0 + \beta n_1 + \dots.$$

Като заместим величините със съответстващите им редове, като краен резултат се получава системата, като този път със щрих означаваме производната по ν.

(17) $$y_0'' + y_0 = 0,$$

$$y_1'' + y_1 + 2\frac{n_1}{n_0} y_0'' + y_0^2 = 0.$$

Първото от двете уравнения се решава веднага

(18) $$y_0 = A\cos(\nu - \nu_0).$$

Заместваме получения резултат във второто уравнение на система (17)

(19) $$y_1'' + y_1 = 2\frac{n_1}{n_0} A\cos(\nu - \nu_0) - \frac{A^2}{2}\left[1 + \cos 2(\nu - \nu_0)\right].$$

За да получим периодично решение приемаме $n_1 = 0$ и полагаме:

(20) $$y_1^* \equiv y_1 - \frac{A^2}{2}.$$

Окончателно уравнението добива вида:

(21) $$y^{*\prime\prime}_1 + y^*_1 = -\frac{A^2}{2}\cos 2(\nu - \nu_0).$$

Търсим решението на (21) във вида $y_1{*}=B\cos 2(\nu-\nu_0)$. Тогава за коефициента пред косинуса намираме $B=\frac{A^2}{6}$. Връщаме се към предишната променлива

(22) $$y=-\frac{A^2}{2}+\frac{A^2}{6}\cos 2(\nu-\nu_0)$$

Сега вече имаме възможност да запишем окончателното решението във вида

(23) $$\sigma=\frac{km}{G^2}+\frac{3\alpha k^2m^3}{G^6}+\frac{kmA}{G^2}\cos n\varphi+\beta\frac{kmA^2}{6G^2}\cos 2n\varphi-\frac{\beta km}{G^2}\frac{A^2}{2}+\ldots$$

Дефинират се следните величини:

(24) $$\frac{km}{G^2}\equiv\frac{1}{P},$$

(25) $$A\equiv e,$$

P и e представляват съответно фокалният параметър и ексцентрицитета на орбитата

(26) $$\sigma=\frac{1}{P}+\frac{3\alpha}{kP^3}+\frac{18\alpha^2}{P^5k^2}+\frac{e}{P}\cos n_0\varphi+\frac{\alpha e^2}{2kP^3}\cos 2n_0\varphi-\frac{3\alpha}{kP^3}\frac{e^2}{2}+\ldots$$

С точност до втората степен на параметрите β и e, разстоянието до силовият център се определя чрез формулата:

(27) $$R=\frac{P}{1+\frac{3\alpha}{kP^2}+e\cos n_0\varphi}\approx\frac{n_0P}{1+en_0\cos n_0\varphi},\; n_0=\sqrt{1-\frac{6\alpha}{kP^2}}.$$

Движението може да се разглежда, като елиптично, като елипсата се движи равномерно в равнината си по посока на движението на тялото-прецесия. Ъгълът, на който се измества елипсата при движение от перихелия (афелия) до перихелия (афелия) е равен на:

(28) $$\Delta\varphi-2\pi=2\pi\left(\frac{1}{n_0}-1\right)\approx\frac{6\pi\alpha}{kP^2}.$$

Намиране уравнението на граничен цикъл по метод на Ван дер Пол

Да намерим граничният цикъл на уравнението [10]:

(29) $$\ddot q+q-\varepsilon\left(1-3q^2-2\dot q^2\right)\dot q=0,\; 0<\varepsilon<<1,$$

като използваме метода на Ван дер Пол.

Търсим решението във вида:

(30) $$q=A(t)\cos\left(t+\theta(t)\right),\; \dot q=-A(t)\sin\left(t+\theta(t)\right).$$

Достига се до системата, която ще осредним

(31) $$\dot A=\frac{\varepsilon A}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\psi\left(1-3A^2\cos^2\psi-2A^2\sin^2\psi\right)d\psi,$$

(32) $$A\dot\theta=\frac{\varepsilon A}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin\psi\cos\psi\left(1-3A^2\cos^2\psi-2A^2\sin^2\psi\right)d\psi.$$

След осредняването се достига до съкратената система:

(33) $$\dot A=\frac{\varepsilon A}{2}\left(1-\frac{9}{4}A^2\right),$$

(34) $$\dot\theta=0.$$

Веднага намираме стационарната амплитуда: $A_s=\frac{2}{3}$. Да направим анализ на стационарното решение. Полагаме $A=\frac{2}{3}+\xi, |\xi|<<1$. Тогава се достига до уравнението:

(35) $\dot{\xi} = -\varepsilon\xi$,

или решението за околност на стационарната амплитуда има вида:

(36) $A = \frac{2}{3} + e^{-\varepsilon t}$.

Уравнението на граничния цикъл е:

(37) $q = \frac{2}{3}\cos\left(t + \theta_0\right)$, θ_0 е константа.

Периодични решения на задачата за заряд подложен на действието на плоска електромагнитна вълна

Нека разгледаме само едномерния случай [1]. Уравнението на движение на заряда се дава с формулата:

(38) $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0{}^2 x = eE_x \sin\left(\nu t - kx\right)$,

където e е елементарния заряд на електрона, E_x - компонентата на електричния вектор по оста x . Решението на (38) се търси под формата на квазихармонична функция във вида:

(39) $x = a\left(t\right)\sin\left(\omega t + \alpha\left(t\right)\right)$, $\omega = \frac{\nu}{N}, N = 1, 2, \ldots.$

Като използваме методът на Кирилов-Боголюбов-Митрополски се достига до скъсената система:

$$\dot{a} = -\beta a + \frac{eE_x N}{ka\omega} J_N\left(ka\right)\sin N\alpha ,$$

(40) $$\dot{\alpha} = \frac{\omega_0{}^2 - \omega^2}{2\omega} - \frac{eE_x}{a\omega} J'_N\left(ka\right)\cos N\alpha .$$

В системата са използвани функции на Бесел от първи род $J_N\left(ka\right)$ от ред N . Условието за намиране на стационарните точки води до уравненията:

$$\omega_0{}^2 - \omega^2 = \frac{2eE_x}{a} J_N\left(ka\right)\sin N\alpha ,$$

(41) $$\omega_0{}^2 - \omega^2 = \frac{2eE_x}{a} J'_N\left(ka\right)\cos N\alpha .$$

Разглеждаме резонансният случай $\omega_0 = \omega$, който е изпълнен при:

$J'_N\left(ka\right) = 0$ или $\cos N\alpha = 0$.

За изследване на устойчивостта на решенията нека запишем системата (40) във вида:

$\dot{a} = f\left(a, \alpha\right), \dot{\alpha} = g\left(a, \alpha\right)$.

Условията за стабилно решение могат да се запишат във вида:

(42) $$\operatorname{Re} P_{1,2} < 0 ,\ P_{1,2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial a} - \frac{\partial g}{\partial \alpha}}{2} + \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial g}{\partial \alpha}} .$$

Изчисленията показват, че стабилните амплитуди удовлетворяват условието:

(43) $J'_N\left(ka\right) = 0$.

Уравнение (3.9.17) показва, че стабилни амплитуди са възможни само за дискретен ред от стойности определени от уравнението:

(44) $ka_i = j_{N,i}$,

където $j_{N,i}$ е аргументът на функцията на Бесел $J_N\left(ka\right)$ от ред N в i -та екстремална точка.

Заключение

Разгледаните примери са едни от многото случаи, в които използването на асимптотични методи, изцяло решава поставените задачи. Разбира се, изборът на конкретен метод зависи, както от структурата на диференциалните уравнения, така и от последващия физичен анализ на резултатите. Макар и решенията да са приемливи при определени граници и условия, асимптотичните методи са незаменими при нечислен анализ на нелинейни динамични системи.

Литература:

1. Damgov, V., P. Trenchev, K. Sheiretsky “Oscillator-wave” model: properties and heuristic instances. Chaos, Solitons and Fractals. Oxford : Pergamon Press, 2003, pp. 41-60
2. Poincaré, H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, V.1-3, 1892.
3. Белецкий, В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. Москва, “Наука”, 1965.
4. Боголюбов, Н.Н., А. Митропольский Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гос. изд-во физико-математической литературы. 1963.
5. Ландау, Л., Е. Лифшиц Теоретическая физика. Том 1. Механика. М.: Наука, 1988.
6. Моисеев, Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука. 1969.
7. Найфе, А. Введение в методы возмущений. Москва, МИР, 1984.
8. Sheiretsky, K., R. Shkevov, N. Erokhin, A satellite performing one rotation in the absolute space within a time equal to two periods of the movement of its mass center along the orbit. Compt. rend. Acad. bulg. Sci., 65,(4), 2012, pp. 505-512.
9. Шейретски, К., Лазарова М., Шкевов Р. Ерохин Н. Движение на спътник в екваториалната равнина на планета. SES 2011. София, 2012, с. 92-98.
10. Эрроусмит, Д, К. Плейс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва, “Мир”, 1986.